(TA)

DURÉE : 3 heures

L'épreuve est constituée de quatre problèmes obligatoires. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

On considère u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice (image matricielle de u) relativement à la base canonique, soit A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix}$$

α étant un paramètre réel.

1° Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de u (ou de A). A est-elle diagonalisable? (On distinguera les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.)

2° On suppose maintenant $\alpha \neq 0$. Montrer que l'on peut déterminer 3 vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, tels que :

$$u(\vec{v_1}) = \vec{v_1}$$
$$u(\vec{v_2}) = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$
$$u(\vec{v_3}) = \vec{v_2} + \vec{v_3}$$

Tournez la page S. V. P.

En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$, que l'on déterminera, telle que la matrice de u relativement à cette base soit A' :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = A'$.

3° Soit V_α la matrice définie par :

$$V_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérifier $V_\alpha . V_\beta = V_{\alpha+\beta}$ et calculer $(V_\alpha)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

4° Calculer A^n en utilisant la décomposition « en blocs ».

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ B & V_\alpha \end{bmatrix} \text{ où B est la colonne } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère la fonction f_λ dépendant du paramètre réel λ, définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par :

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$$

-32- ENSET 81

1° Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx$$

est convergente quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

2° Montrer que, quel que soit A réel > 0, on a

$$\int_0^{A} f_\lambda(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{2}$$

et retrouver ainsi la convergence démontrée dans la question précédente.

3° En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{y}$ dans l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx,$$

calculer la valeur numérique de $I(\lambda)$.

4° Retrouver ce résultat par le calcul dans les deux cas :

$$\lambda = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = 2$$

5° On suppose $\lambda > 0$, montrer la convergence de l'intégrale

$$J(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}\,\mathrm{Arctg}\,x}{(1+x^\lambda)^2}$$

et calculer sa valeur.

TROISIÈME PROBLÈME

1° Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit $P(\lambda) = \text{dét}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ le polynôme caractéristique de u. Montrer que, s'il existe un entier p tel que u^p soit l'endomorphisme nul de E, alors $P(\lambda) = (-\lambda)^n$.

2° Soient u et v deux endomorphismes de E vérifiant :

1. $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).
2. $u \circ v = v \circ u$.
3. dét $v \neq 0$.

On pose $f = u + v$.

a. Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.

b. Montrer que, si l'on pose $w = v^{-1} \circ u$, alors il existe un entier k tel que $w^k = 0$.

c. Montrer que $\det f = \det v$ (on pourra utiliser l'écriture

$$f = v \circ (\mathrm{Id}_E + v^{-1} \circ u)).$$

QUATRIÈME PROBLÈME

On se propose d'étudier les solutions réelles de l'équation où x est l'inconnue :

$$\text{(E)} \qquad a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x = nb^x$$

(n étant un entier positif donné et $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ $n+1$ nombres réels positifs donnés).

On désignera par m et M respectivement les nombres :

$$m = \mathrm{Inf}\,\{\, a_i / i = 1, 2, \ldots n \,\}$$
$$M = \mathrm{Sup}\,\{\, a_i / i = 1, 2, \ldots n \,\}$$

et on pose :

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^x \right)^{\frac{1}{x}}$$

Tournez la page S. V. P.

1° Montrer que, lorsque x tend vers 0, la fonction φ admet la limite :

$$l = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

2° Montrer que l'application φ prolongée par $\varphi(0) = l$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$m \leqslant \varphi(x) \leqslant M \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

3° Montrer que $\varphi(x)$ converge vers M lorsque $x \to +\infty$ et vers m lorsque $x \to -\infty$, (on pourra, lorsque $x \to +\infty$, écrire $\varphi(x)$ sous la forme :

$$M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{a_i}{M}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}$$

et utiliser la propriété $\lim \left(\frac{a_i}{M}\right)^x = 0$ si $a_i \neq M$. Lorsque $x \to -\infty$, on utilisera $\varphi(-x)$.

4° On suppose désormais $m \neq M$. Soit b vérifiant $b < m$ ou $b > M$. Montrer que l'équation (E) n'admet aucune solution.

5° On suppose $m < b < M$ et $b \neq l$. Montrer que (E) admet au moins une solution $x \neq 0$.

6° Résoudre l'équation $1 + 3^x = 2^{x+1}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail